**Tema 3.1.3. Distribución de Poisson.**

**Tema 3.1.4. Aproximación entre las Distribuciones Binomial y de Poissón.**

**Motivación del tema.** Suponga que en promedio 1 de 1000 personas cometen un error numérico al elaborar su declaración de impuestos. Si se seleccionan al azar y se examinan 10 000 declaraciones, obtenga la probabilidad de que 6, 7 u 8 tengan errores.

Podemos resolver este problema utilizando la distribución binomial donde la probabilidad de éxito es igual a la probabilidad de cometer un error numérico

Mientras que declaraciones examinadas, entonces la probabilidad buscada queda como

Observe que en este ejemplo es muy grande y es pequeña, mientras que . El resultado que obtuvimos lo podemos aproximar mediante la siguiente distribución de Poisson

Sin lugar a dudas, es mucho más difícil evaluar la expresión que involucra a los coeficientes binomiales que la que involucra a las exponenciales. La fórmula para aproximar un término binomial por un término Poissón es

**Teorema 1.** Si en una distribución binomial , y permanece constante entonces

**Demostración.** Sustituyendo obtenemos:

Cancelando y acomodando cada factor de con un factor del numerador podemos escribir:

Ahora tomando el límite cuando y observando que

en donde en el último límite hemos utilizado la fórmula

Una observación final, como es la esperanza o promedio de una distribución binomial entonces también es la esperanza de una distribución de Poisson.

Así obtenemos que

**Ejercicios.**

1. De acuerdo con una oficina de salud, la cantidad promedio de ahogados por año es de 3 por cada 100 000 habitantes. Calcule la probabilidad, con binomial y Poisson, de que en una ciudad de 200 000 habitantes haya (a) 8, (b) entre 4 y 8, (c) menos de 3 ahogados por año.

Respuesta: (a) , (b) , (c)

1. Si el 3% de los focos que fábrica una compañía son defectuosos, encuentre la probabilidad, con binomial y Poisson, de que en una muestra de 100 focos, (a) 2, (b) entre 2 y 4, (c) más de 3, sean defectuosos.

Respuesta: (a) , (b) , (c)

**Definición 1.** Una variable aleatoria tiene una distribución de Poissón con parámetro λ si su función de densidad es de la forma

donde

probabilidad de tener éxitos

promedio de éxitos.

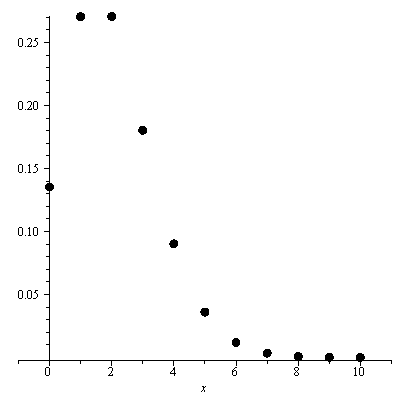
**Teorema 2.** La función definida por es una función de densidad, es decir, satisface las siguientes propiedades:

* .

**Demostración.** Demostraremos la fórmula 3, solamente debemos utilizar la fórmula como sigue:

**Ejemplo 1.** Una secretaria comete en promedio 2 errores mecanográficos por página. ¿Cuál es la probabilidad de que en la siguiente página tenga (a) 4 o más errores, (b) ningún error?

**Solución.** La gráfica de la función de densidad de Poisson asociada a este problema es

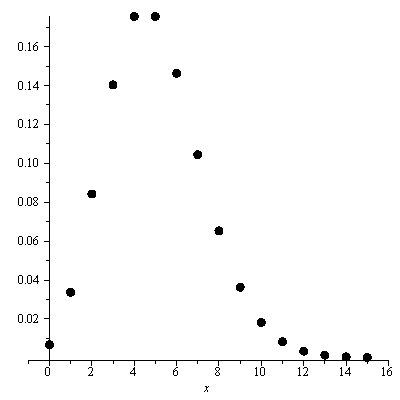


En este ejemplo entonces para (a) la respuesta es

Para (b) la respuesta es

**Ejemplo 2.** Un restaurante prepara una ensalada especial, que contiene en promedio 5 legumbres. Determinar la probabilidad de que la ensalada contenga más de 5 legumbres (a) en un día determinado, (b) en 3 de los siguientes 4 días, (c) por primera vez en el mes de abril, el día 5.

**Solución.** La gráfica de la función de densidad de Poisson asociada a este problema es



Para (a) la respuesta es

Para (b) utilizamos la distribución binomial con

y

Así buscamos

Para (c) utilizamos la distribución geométrica, pues hasta el quinto día queremos que la ensalada tenga más de 5 legumbres, entonces buscamos la probabilidad

**Observación 2.** La distribución de Poisson se usa para sucesos **raros,** Otros ejemplos donde podemos aplicar esta distribución son:

* El número de errores en una página de un libro. Encontrar un error en una página es raro. Además se toma como el promedio de errores.
* El número de accidentes en una esquina durante un periodo de tiempo. Que suceda un accidente en una esquina es raro. En este caso es el promedio de accidentes.
* El número de glóbulos rojos que hay en una muestra de sangre que se obtuvo de una gran muestra de sangre de volumen , donde ( es mucho más grande que ). En este ejemplo λ es el promedio de glóbulos rojos por unidad de volumen.
* El número de estrellas que hay en una pequeña región del espacio cuando consideramos una región del espacio mucho más grande .

**Ejemplo 3.** El número promedio de ratas de campo por acre en un campo de trigo de 5 acres se estima que es de 12. Encuentre la probabilidad de que menos de 7 ratas se encuentren a) en un acre de terreno determinado, b) en 2 de los siguientes 3 acres inspeccionados.

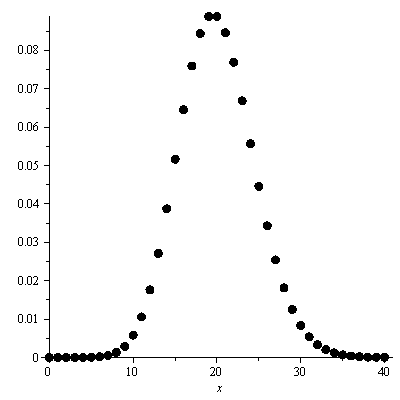
**Solución.** Para resolver el problema partimos de que el número de ratas que hay en un acre tiene una distribución de Poisson con

Para contestar a) lo hacemos calculando la probabilidad

Para b) utilizamos la distribución binomial con para obtener el resultado como

**Ejemplo 4.** La escasez de glóbulos rojos puede determinarse examinando al microscopio una muestra de sangre. Suponiendo que un volumen pequeño tiene en promedio 20 glóbulos rojos en personas normales. ¿Cuál es la probabilidad de que una muestra de sangre en una persona normal contenga menos de 15 glóbulos rojos?

**Solución.** La gráfica de la función de densidad de Poisson asociada a este problema es

****

Para resolver el problema tomamos una distribución de Poisson con y entonces buscamos que es

Que nos indica que es muy raro este suceso.

**Teorema 3. Propiedades de la Distribución de Poisson.**

|  |  |
| --- | --- |
| Esperanza |  |
| Varianza |  |
| Función Generadora de Momentos |  |

**Ejercicios.**

1. Cierta región es azotada por 6 huracanes al año. Determine la probabilidad de que en un año esta zona sea afectada por (a) menos de 4 huracanes, (b) entre 6 y 8 huracanes.

Respuesta: (a) 0.1512, (b) 0.4015.

1. En un estudio de inventario se determinó que, en promedio, las demandas correspondientes a un artículo fueron de 5 por día. ¿cuál es la probabilidad de que en un día determinado este artículo (a) se requiera más de 5 veces? , (b) no se requiera en absoluto?

Respuesta: 0.3840, (b) 0.0067.

1. Se estima que el número promedio de ratones por acre, en un sembrado de trigo de 5 acres, es de 12animales. Determine la probabilidad de que menos de7 ratones se hallen (a) en un determinado acre, (b) en 2 de los siguientes acres inspeccionados.

Ayuda: para (b) el promedio de ratones en 2 acres es de 24, después utilice la distribución binomial para hallar las diferentes combinaciones entre los 5 acres.

Respuesta: (a) 0.0458, (b) 0.00058.

Tenemos un fluido de volumen que contiene un gran número de pequeños organismos. Se supone que estos organismos no tienen instintos sociales, de tal manera que la densidad de organismos es constante. Ahora se examina una gota de volumen ¿cuál es la probabilidad de que se hallen organismos en la gota? Suponemos que es mucho mayor que .

**Solución.** Como los organismos están distribuidos uniformemente por todo el fluido, la probabilidad de encontrar un organismo en la gota es . Por tanto, la probabilidad de encontrar organismos en se obtiene con una distribución binomial

Multiplicando y dividiendo por en en la fórmula anterior obtenemos

donde hemos utilizado la densidad de organismos . Ahora simplificamos los factoriales como sigue

Entonces nuestra fórmula para toma la forma

Ahora si es muy grande o se cumple

y

Probabilidad de tener organismos en

que es una distribución de Poisson con , que es el promedio de organismos en .